ISSN 1561-5359. Штучний інтелект, 2017, № 2

УДК 519.14

Н.К. Тимофієва
Міжнародний науково-навчальний центр інформаційних технологій та систем НАН та МОН України, Україна
пр. академіка Глушкова, 40, м. Київ-187, 03680, МСП

ПРО ПРИРОДУ СКІНЧЕННИХ ТА НЕСКІНЧЕННИХ КОМБІНАТОРНИХ МНОЖИН

N.K. Tymofijeva
International Scientific and Training Center for Information Technologies and Systems of National Academy of Sciences of Ukraine and Ministry of Education and Science of Ukraine, Ukraine
40, Academician Hlushkov av., Kyiv-187, 03680, MSP

ON THE NATURE OF FINITE END INFINITE OF COMBINATORIAL SETS

Досліджуються деякі властивості комбінаторних конфігурацій та їх множин. Показано, що, залежно від прикладної задачі комбінаторної оптимізації, вони можуть бути скінченними та нескінченними, як з повтореннями, так і без повторень. У штучному інтелекті комбінаторні конфігурації можуть бути як вхідними даними, так і аргументом цільової функції.

Ключові слова*:* комбінаторна множина, комбінаторна конфігурація, аргумент цільової функції, розбиття n-елементної множини на підмножини, вибірки, кластеризація, класифікація.

Some properties of combinatorial configurations and their sets are explored. It is shown that depending on the applied problems of combinatorial optimization, they can be finite and infinite, both with repetitions and without repetitions. In artificial intelligence, combinatorial configurations can be both input data and argument of objective function.

Keywords: combinatorial set, combinatorial configuration, argument of objective function, partitioning n-element set into subsets, selections, clusterization, classification.

Вступ

Для прикладних задач комбінаторної оптимізації аналізуються комбінаторні конфігурації, які є аргументом цільової функції. Залежно від певного класу задач вони можуть бути як з повтореннями, так і без повторень, як скінченними, так нескінченними. У літературі ці властивості комбінаторних конфігурацій ґрунтовно не досліджувалися. Як аргумент цільової функції, у задачах комбінаторної оптимізації вони достатньою мірою не вивчалися.

Постановка проблеми

У комбінаториці, як правило, розглядаються скінченні комбінаторні конфігурації (перестановки, розбиття n-елементної множини на підмножини, різні типи вибірок). Але в прикладних задачах комбінаторної оптимізації вони виступають як аргумент цільової функції, та, залежно від умови задачі, можуть бути як скінченними, так і нескінченними, як з повтореннями, так і без повторень.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Комбінаторні конфігурації різних типів описано в багатьох публікаціях, зокрема в [1–7]. Але, як аргументу цільової функції, в літературі їм достатньої уваги не приділяють. З повтореннями та без повторень описано вибірки різних типів, але інші комбінаторні конфігурації з такими властивостями не висвітлено. Також, в основному, розглядаються задачі комбінаторної оптимізації, які розв’язують на скінченній комбінаторній множині. Як показують результати дослідження, цільова

функція в задачах цього класу може бути уведена і на нескінченній множині комбінаторного характеру.

Мета дослідження

Проведення аналізу задач комбінаторної оптимізації з метою виявлення комбінаторних конфігурацій (аргументу цільової функції), які можуть бути як з повтореннями, так і без повторень, а їхні множини – як скінченними, так і нескінченними.

Типи комбінаторних конфігурацій

Під комбінаторною конфігурацією розуміємо будь-яку сукупність елементів, яка утворюється з усіх або з деяких елементів заданої базової множини $A=\{a_1,...,a_n\}$ [8]. Позначимо її впорядкованою множиною $w^k=(w_1^k,...,w_\eta^k)$, де $\eta\in\{1,...,n\}$ – кількість елементів у w^k, $W=\{w^k\}_1^q$ – множина комбінаторних конфігурацій. Верхній індекс k ($k\in\{1,...,q\}$) у w^k позначає порядковий номер w^k у W, q – кількість w^k у W.

Означення 1. Рекурентним комбінаторним оператором назвемо сукупність правил, за якими з елементів базової множини A утворюється комбінаторна конфігурація w^k.

Різноманітні типи комбінаторних конфігурацій утворюються за допомогою трьох рекурентних комбінаторних операторів: вибирання, транспозиція, арифметичний.

Справедливість цього твердження випливає з аналізу комбінаторних конфігурацій.

Наведемо найпростіші відомі комбінаторні конфігурації. Для їхнього позначення використовуємо $w^k\in W$ або символи, що описані в класичній літературі.

Вибірки. З поняттям вибірки пов'язують як саму операцію виділення підмножин заданої множини, так і її результат: вибрану підмножину. У подальшому маємо на увазі друге поняття. Нехай задано базову множину $A=\{a_1,...,a_n\}$. З неї одержимо η-вибірку. Число η називають об'ємом вибірки. У η-вибірках, залежно від умов задачі, або враховується порядок розташування в них елементів (тоді їх називають η-перестановками або η-розміщеннями), або не враховується. У цьому випадку вони називаються η-сполученнями. Оскільки потужність множини неупорядкованих вибірок без повторень дорівнює 2^n, то її порівнюють з бінарними послідовностями.

Отже, існують такі типи вибірок: упорядковані та неупорядковані. Неупорядковані – це сполучення без повторень і з повтореннями. Упорядковані – це розміщення з повтореннями та без повторень.

Оскільки будь-яка вибірка утворюється вибиранням відповідних елементів із базової множини $A=\{a_1,...,a_n\}$, то цю операцію назвемо операцією вибирання і позначимо її $\alpha(A^0)$, $A^0\subset A$.

Сполучення як з повтореннями, так і без повторень утворюються єдиною операцією – вибиранням.

Перестановки. Цю комбінаторну конфігурацію досліджено досить ґрунтовно. Їх ще називають упорядкованими вибірками з n елементів базової множини A по n, бієкцією множини A на A, функцією. У подальшому користуємося терміном перестановка. Елементи скінченної базової множини $A=(a_1,...,a_n)$ перенумеруємо від 1 до n і вважатимемо, що елементами A виступають саме ці числа. Назвемо перестановкою будь-яке розміщення чисел $1,2,...,n$ у деякому порядку. Число

різних перестановок з n символів дорівнює добутку $1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n$, який позначається $n!$. Якщо в заданій перестановці поміняти місцями будь-які елементи (не обов'язково розміщені поряд), а всі інші залишити на місці, то одержимо нову перестановку. Операцію, яка змінює порядок елементів у перестановці, називають підстановкою. Підстановка розкладається на цикли. Цикли довжиною два називають транспозиціями, тобто транспозиції – це найпростіші підстановки і означають переміщення двох елементів. У подальшому користуємося цим терміном. Операцію транспозиції позначимо $\alpha^{'}(w_l, w_t)$, $l, t \in \{1,...,n\}$. Від будь-якої перестановки з n елементів можна перейти до будь-якої іншої з тих же символів за допомогою як однієї, так і кількох транспозицій.

*Розбиття натурального числа***.** Розбиттям натурального числа називається подання n у вигляді суми цілих додатних чисел $n = \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_\eta$, $\lambda_j > 0$, $j = \overline{1, \eta}$, $\eta \in \{1,..., n\}$.

Розділяють упорядковані (композиції) та неупорядковані розбиття числа. В упорядкованих ураховуються розбиття з однаковою кількістю і однаковим значенням їхніх компонент, які відрізняються одне від одного лише порядком.

Будь-яке неупорядковане розбиття λ числа n утворюється з попереднього λ^* відніманням від компонент λ_j^* значення x і додаванням цього значення x до компонент λ_l^*, $j \neq l$, $\lambda = (\lambda_1,...,\lambda_l,...,\lambda_t,...,\lambda_\eta)$, $\lambda^* = (\lambda_1^*,...,\lambda_j^*,...,\lambda_l^*,...,\lambda_\eta^*)$. Операцію, за допомогою якої утворюється розбиття числа, назвемо додавання-віднімання або арифметичною і позначимо її $\alpha^{''}(\lambda_j - x_t, \lambda_l + \overline{x_s})$, $x_t, \overline{x_s} \in \{1,..., n-1\}$, $\sum_{j=1}^{p} x_j = \sum_{j=1}^{p^{'}} \overline{x_j} = x$, $x < n$, $t, s, p, p^{'} \in \{1,...,n-1\}$.

Розбиття числа λ утворюються однією операцією – арифметичною.

Композиція – це розбиття числа, в якому ураховується порядок компонент. Так, наприклад, є сім розбиттів числа 5: (5), (4, 1), (3, 2), (3, 1, 1), (2, 2, 1), (2, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 1, 1) та шістнадцять його композицій: (5); (4, 1), (1, 4); (3, 2), (2, 3); (3, 1, 1), (1, 3, 1), (1, 1, 3); (2, 2, 1), (2, 1, 2), (1, 2, 2); (2, 1, 1, 1), (1, 2, 1, 1), (1, 1, 2, 1), (1, 1, 1, 2); (1, 1, 1, 1, 1).

Утворення всілякої множини композицій проводиться арифметичним рекурентним комбінаторним оператором, а з тих $\lambda = (\lambda_1,...,\lambda_j,...,\lambda_l,...,\lambda_\eta)$, якщо $\lambda_j \neq \lambda_l$, $j \neq l$, $j, l \in \{1,..., \eta\}$, композиція λ^* утворюється операцією транспозиції.

Отже композиції утворюються двома операціями: арифметичною і транспозицією.

Розбиття n-елементної множини A на підмножини. Розбиттям n-елементної множини A на η підмножин (блоків) назвемо множину підмножин $\rho = (\rho_1,..., \rho_\eta)$ таку, що $\rho_1 \cup ... \cup \rho_\eta = A$, $\rho_j \cap \rho_l = \varnothing$, $j \neq l$, $\rho_j \neq \varnothing$, $j, l \in \{1,..., \eta\}$. Непуста підмножина $\rho_j = \{a_1,..., a_{\xi_j}\}$, $a_s \in A$, $s \in \{1,..., n\}$, може мати від 1 до n елементів ($\xi_j \in \{1,..., n\}$). Кількість підмножин ρ_j у розбитті ρ також може бути від 1 до n ($\eta \in \{1,..., n\}$). Їхню множину позначимо Θ.

Нескладно помітити, що при генеруванні множини Θ у деяких ρ елементи змінюють порядок їхнього слідування, тобто, для утворення розбиттів необхідно, крім арифметичного рекурентного комбінаторного оператора, використовувати і транспозицію.

Таким чином, розбиття ρ у множині Θ утворюється двома рекурентними комбінаторними операторами: або арифметичним або транспозицією.

Бінарні послідовності. Бінарна послідовність – це множина $r = (r_1,...,r_n)$, елементи якої $r_j \in \{0,1\}$. Їхню множину позначимо B. Дві множини $r, r^* \in B$ відрізняються між собою або різною кількістю нулів та одиниць, або їхнім порядком при однаковій кількості $r_j \in \{0,1\}$, $r_j \in r$, $r_t^* \in r^*$, $j \neq t$, $j,t \in \{1,...,n\}$, $r = (r_1,...,r_j,...,r_n)$, $r^* = (r_1^*,...,r_t^*,...,r_n^*)$.

Бінарні послідовності r можуть утворюватися двома операціями: арифметичною та операцією вибирання.

Дійсно, якщо в бінарній послідовності $r = (r_1,...,r_n)$ від певних компонент $r_j = 1$ відняти одиницю, а до компонент $r_t = 0$ добавити одиницю, то одержимо нову бінарну послідовність, $j \neq t$, $j,t \in \{1,...,n\}$. У відомих алгоритмах при їхньому генеруванні використовується арифметична операція.

Розглянемо, яким чином можна формувати бінарні послідовності операцією вибирання. Вважатимемо, що множина A упорядкована, тобто $A = (a_1,...,a_n)$ і $a_j = 1$ для $j = \overline{1,n}$. Якщо операцією вибирання певний елемент a_j з j-ї позиції помістити в позицію j множини r, а елементи $r_t = 0$, $j \neq t$, $j,t \in \{1,...,n\}$, то одержимо нову бінарну послідовність. Якщо описану операцію вибирання виконати по тих же правилах, що і формування сполучень без повторень, то одержимо множину всіляких бінарних послідовностей. Тобто, сполучення без повторень і бінарні послідовності генеруються модифікацією одного і того ж алгоритму.

Крім оговорених комбінаторних конфігурацій існує багато інших, наприклад блок-схеми, графи тощо. Вони також можуть бути аргументом цільової функції в задачах комбінаторної оптимізації.

Нижче викладемо правила утворення різних їхніх типів, уведемо характерні для них операції [8]. У подальшому, для зручності, вживатимемо термін оператор або операція, що має той же зміст.

Ураховуючи вищевикладене, узагальнимо способи утворення комбінаторних конфігурацій.

Комбінаторні конфігурації w^k з елементів базової множини A утворюються рекурентним комбінаторним оператором вибирання.

Комбінаторна конфігурація w^k у множині W утворюється з $w^i \in W$, $k < i$, рекурентним комбінаторним оператором транспозиції або арифметичним. Перша w^1 утворюється з елементів множини A операцією вибирання.

Дійсно, якщо w^k – перестановка, то вона містить усі елементи з базової множини A. Тому наступна w^k утворюється оператором транспозиції з будь-якого попереднього w^i. Якщо w^k – розбиття числа, то сума його компонент є число n і наступне w^k утворюється арифметичною операцією з будь-якого попереднього w^i. Бінарна послідовність w^k утворюється з w^i арифметичною операцією.

Якщо w^k – вибірка і відрізняється від попередніх хоча б одним елементом a_j, який вибирається лише з базової множини A, то w^k неможливо утворити з будь-якої попередньої w^i операцією вибиранням, тобто рекурентним комбінаторним оператором вибирання w^k утворюється з будь-якої w^i, $i < k$, якщо w^i містить усі елементи, необхідні для формування w^k.

Оскільки базова множина A містить усі елементи, необхідні для формування $w^k \in W$, то перша $w^1 \in W$ для усіх типів комбінаторних конфігурацій утворюється з A оператором вибирання.

Дві комбінаторні конфігурації w^k і w^i назвемо тотожними, якщо кількість елементів у них однакова і $w_j^k = w_j^i$, $j = \overline{1, n}$, $k \neq i$.

Якщо порядок елементів у w^k і w^i при визначенні їхньої тотожності не враховується, то w^k і w^i тотожні, якщо $\eta^k = \eta^i$ і $w_j^k = w_t^i$ для $j = \overline{1, \eta^k}$, $t \in \{1, ..., \eta^i\}$.

Комбінаторні конфігурації w^k і w^i, які складаються з блоків (підмножин ρ_j^k, ρ_s^k) назвемо тотожними, якщо кількість ρ_j^k і ρ_t^k у них однакова, і для будь-якої підмножини $\rho_j^k \subset w^k$ можна знайти у множині w^i підмножину ρ_t^i, яка не відрізняється від ρ_j^k ні кількістю елементів, ні самими елементами.

Означення 2. Дві нетотожні комбінаторні конфігурації w^k і w^i назвемо ізоморфними, якщо $\eta^k = \eta^i$.

Якщо w^k і w^i складаються з підмножин (блоків), то вони ізоморфні, якщо кількість їхніх підмножин однакова і для будь-якого блоку $\rho_j^k \subset w^k$ в комбінаторній конфігурації w^i знайдеться підмножина $\rho_t^i \subset w^i$, для якої $\xi_j^k = \xi_t^i$, де ξ_j^k, ξ_t^i – кількість елементів у підмножинах $\rho_j^k \subset w^k$ та $\rho_t^i \subset w^i$.

Нетотожні бінарні послідовності w^k і w^i, які містять однакову кількість одиниць, ізоморфні.

Означення 3. Підмножину $W_\eta \subset W$ назвемо підмножиною ізоморфних комбінаторних конфігурацій, якщо її елементи – ізоморфні комбінаторні конфігурації.

Рекурентні комбінаторні оператори вибирання та арифметичні породжують як ізоморфні, так і неізоморфні комбінаторні конфігурації $w^k \in W$.

Множина W складається з підмножин ізоморфних комбінаторних конфігурацій W_η.

Розглянемо комбінаторні конфігурації, множина W яких утворена кількома рекурентними комбінаторними операторами. У цьому випадку одним із операторів виступає або операція вибирання, або арифметична. Вони утворюють як ізоморфні, так і неізоморфні комбінаторні конфігурації. Тому множина W, елементи якої утворені кількома рекурентними комбінаторними операторами, складається з підмножин ізоморфних комбінаторних конфігурацій.

Зауваження. Оскільки операція транспозиції змінює лише порядок слідування елементів у $w^k \in W$, то всіляка множина перестановок W є множиною ізоморфних комбінаторних конфігурацій.

Ураховуючи оговорене вище, у множині W, елементи якої утворені кількома рекурентними комбінаторними операторами, виділимо підмножину $W^* \subset W$, будь-який елемент якої утворюється одним типом рекурентних комбінаторних операторів, і підмножини $W^{**} \subset W$, комбінаторні конфігурації яких утворено іншим типом. Елемент $w^{k*} \in W^*$ є першою комбінаторною конфігурацією підмножини $W^{**} \subset W$. Назвемо $W^* \subset W$ підмножиною базових комбінаторних конфігурацій.

Отже, тип комбінаторної конфігурації $w^k \in W$ визначається рекурентним комбінаторним оператором, за допомогою якого він утворюється з елементів базової множини A або з попередньої $w^{k-1} \in W$.

Дві нетотожні комбінаторні конфігурації $w^k = (w_1^k, ..., w_{\eta^k}^k)$ та $w^i = (w_1^i, ..., w_{\eta^i}^i)$ назвемо ізоморфними, якщо $\eta^k = \eta^i$.

Підмножину $W_{\eta^k} \subset W$ назвемо підмножиною ізоморфних комбінаторних конфігурацій, якщо її елементи – ізоморфні комбінаторні конфігурації.

Фрактальні властивості комбінаторних множин. Певне впорядкування комбінаторних конфігурацій з використанням властивості періодичності [8] утворює комбінаторну множину, яка має фрактальну природу. Вважаємо, що комбінаторні множини *самоподібні*, якщо їхні елементи утворюються одним і тим же рекурентним комбінаторним оператором, а їхнє впорядкування проводиться за одними і тими ж правилами. Для фіксованого n вони скінченні, а для довільного n ця множина – нескінченна. Вибірки (сполучення та розміщення з повтореннями та без повторень) упорядковуються підмножинами ізоморфних вибірок. На підмножині ізоморфних вибірок різних типів множина $W_{\eta^k} \subset W$ – скінченна. На усій множині W для сполучення та розміщення без повторень вона також скінченна, а для сполучення та розміщення з повтореннями W – нескінченна.

Розбиття n-елементної базової множини є аргументом цільової функції в задачах розбиття (кластеризації, класифікації тощо). Залежно від поставленої задачі їхня множина може бути як скінченною, так і нескінченною, як з повтореннями, так і без повторень.

Виходячи з фрактальної структури комбінаторних множин, W – скінченна для фіксованого n, якщо комбінаторні конфігурації в ній – без повторень. Для довільного n вона нескінченна. Якщо комбінаторні конфігурації в W – з повтореннями, то для фіксованого n підмножина $W_{\eta^k} \subset W$ – скінченна, а множина W – нескінченна.

Задачі комбінаторної оптимізації, аргументом цільової функції в яких є скінченні та нескінченні з повтореннями та без повторень комбінаторні конфігурації. Аргументом цільової функції в задачах штучного інтелекту, зокрема в задачах розпізнавання та синтезу мовленнєвих сигналів, задачах клінічної діагностики, виступають вибірки різних типів. Їхня множина (сполучення та розміщення з повтореннями та без повторень) упорядковується підмножинами ізоморфних вибірок. Ця комбінаторна конфігурація в задачах цього класу може бути і вхідними даними. Природні сигнали описуються розміщенням з повтореннями. Саме цим пояснюється нечіткість вхідної інформації в задачах штучного інтелекту.

Розглянемо розбиття n-елементної базової множини, яке є аргументом цільової функції в задачах розбиття (кластеризації, класифікації, задачі покриття об'єктами заданої поверхні тощо). Залежно від поставленої задачі множина цієї

комбінаторної конфігурації може бути як скінченною, так і нескінченною. У кластеризації та класифікації виділимо такі підзадачі:

- задано скінченну базову множину A. Кількість кластерів може бути як задана, так і не задана. Необхідно розподілити елементи базової множини по кластерах так, щоб останні не перетиналися. Ця задача зводиться до задачі кластеризації;
- задано скінченну базову множину A. Кластери можуть бути як задані, так і не задані. Елементи множини A розподіляються так, що один елемент може належати різним кластерам. У такому випадку аргументом цільової функції є розбиття n-елементної множини A на η підмножин з повтореннями;
- задано нескінченну базову множину, частина елементів якої відома, а частина визначається в процесі розв'язання задачі, тобто інформація поступає в процесі розв'язання задачі та змінюється в часі. Аргументом цільової функції в ній є часткове розбиття нескінченної множини A на η підмножин з повтореннями.

У такому разі уводиться часткова цільова функція та часткове розбиття.

Розглянемо задачу кластеризації. Назвемо множину підмножин $\rho = (\rho_1, ..., \rho_\eta)$ таку, що $\rho_p \cap \rho_s = \varnothing$, $\rho_1 \cup ... \cup \rho_\eta = A$, $p \neq 1$, $\rho_p \neq \varnothing$, $p, s \in \{1, ..., \eta\}$. Непуста підмножина $\rho_p = \{a_1, ..., a_{\xi_p}\}$, $a_s \in A$, $s \in \{1, ..., n\}$, може мати від 1 до n елементів ($\xi_p \in \{1, ..., n\}$). Кількість підмножин ρ_p у розбитті ρ може бути від 1 до n ($\eta \in \{1, ..., n\}$).

Два розбиття ρ^k та ρ^i назвемо ізоморфними, якщо кількість їхніх підмножин однакова, і для будь-якої підмножини $\rho_p^k \subset \rho^k$ можна знайти у множині ρ^i підмножину ρ_s^i, яка не відрізняється від ρ_p^k кількістю елементів, а відрізняється самими елементами.

Підмножину $\Theta_\eta \subset \Theta$ назвемо підмножиною ізоморфних комбінаторних конфігурацій, якщо її елементи – ізоморфні комбінаторні конфігурації.

Оскільки для перших двох задач розбиття ρ^k утворюється з елементів скінченної множини, що характерно для задачі кластеризації, розглянемо аргумент цільової функції для третьої задачі, яка є задачею класифікації. Уведемо базову нескінченну множину $\tilde{A}$, в якій елементи $\tilde{a}_l$ для $l = \overline{1, n}$ задано, а для $l > n$ визначаються в процесі розв'язання задачі. З відомих елементів $\tilde{a}_r \in \tilde{A}$, $r = \overline{1, q^{''}}$, утворюємо часткове розбиття множини $\tilde{A}$ на η підмножин (блоків) $\tilde{\rho} = (\tilde{\rho}_1, ..., \tilde{\rho}_\eta)$, $q^{''} > n$ – кількість відомих елементів. Тоді множина підмножин $\tilde{\rho} = (\tilde{\rho}_1, ..., \tilde{\rho}_\eta)$ має такі характеристики: $\tilde{\rho}_1 \cup ... \cup \tilde{\rho}_\eta = \tilde{A}$, $\tilde{\rho}_p \cap \tilde{\rho}_s = \varnothing$ або $\tilde{\rho}_p \cap \tilde{\rho}_s \neq \varnothing$, $p \neq s$, $\tilde{\rho}_p \neq \varnothing$, $p, s \in \{1, ..., \eta\}$. Непуста підмножина $\tilde{\rho}_p = \{\tilde{a}_1, ..., \tilde{a}_{\xi_p}\}$ може мати від 1 до q^* елементів ($\xi_p \in \{1, ..., q^*\}$), $\eta \in \{1, ..., q^{''}\}$, $q^* > q^{''}$, $\tilde{a}_r = \tilde{a}_l$ або $\tilde{a}_r \neq \tilde{a}_l$, $\tilde{a}_r, \tilde{a}_l \in \rho_p$, $r, l \in \{1, ..., \xi_p\}$. У процесі розв'язання задачі при появі нових елементів множина $\tilde{\rho}$ доповнюється та є нескінченною. Їхня множина $\tilde{\Theta}$ для фіксованого η – скінченна, а для n – нескінченна.

Як правило, при моделюванні задачі класифікації аргументом цільової функції вважають вхідні дані. Але в цій задачі оцінка результату проводиться за частковими цільовими функціями, аргументом якої є часткове розбиття нескінченної множини на підмножини з повтореннями.

У класифікації характеристика кластерів відома, об'єкти, які необхідно визначити, до якого вони класу відносяться, аналізуються не одночасно, а групами чи окремими елементами. Оскільки результат визначається не одночасно, а за частковою цільовою функцією, то задача класифікації відноситься до динамічних задач комбінаторної оптимізації.

До задач розбиття відноситься і задача покриття об'єктами заданої поверхні [9]. Змоделювавши її в рамках теорії комбінаторної оптимізації можна побачити, що аргументом цільової функції в ній є розбиття n-елементної множини на підмножини як з повтореннями, так і без повторень.

Нехай задано поверхню з нанесеною на ній координатною сіткою. Послідовність комірок цієї сітки задамо упорядкованою множиною A. Елементи, які відповідають коміркам сітки, розміщені в A послідовно, починаючи з верхнього рядка сітки і до останнього, нижнього рядка. У цій задачі необхідно вибраними геометричними об'єктами оптимально покрити задану поверхню. Виділимо в ній такі підзадачі:

- поверхня покривається об'єктами так, щоб останні не перетиналися.
- поверхня покривається об'єктами так, щоб останні повністю її покривали. У такому випадку один і той же елемент із A може належати різним кластерам.

Для обох задач розбиття $\rho \in \Theta$ утворюється з елементів скінченної множини A. У першій задачі утворені кластери не перетинаються, тобто $\rho_p \bigcap \rho_l = \varnothing$. При цьому $\rho_1 \bigcup ... \bigcup \rho_\eta = A$ у разі розв'язаної задачі або $\rho_1 \bigcup ... \bigcup \rho_\eta = A^*$, де $A^* \subset \text{A}$ – підмножина розподілених по кластерах елементів. Позначимо $A^{**} = A \setminus A^*$ – підмножину не розподілених між кластерами елементів із A. Задача полягає в знаходженні такого розбиття $\rho^* \in \Theta$, для якого змодельована цільова функція набуває оптимального розв'язку за умови, що $\overline{\overline{A^{**}}} \to 0$ при виконанні заданих обмежень.

У другій задачі утворені кластери перетинаються, тобто $\rho_p \bigcap \rho_l \neq \varnothing$. Необхідно мінімізувати площу вибраних об'єктів покриття так, щоб вони повністю покрили задану поверхню, а кількість однакових в одному кластері елементів, об'єднаних у множину $A^{***} \subset \text{A}$, була б мінімальною. Оговорена задача полягає в знаходженні такого розбиття $\rho^* \in \Theta$, для якого змодельована цільова функція набуває оптимального розв'язку за умови, що $\overline{\overline{A^{***}}} \to 0$ при виконанні певних обмежень. В обох задачах проводиться мінімізація елементів із множини A, які не розподілені між кластерами, або мінімізація однакових елементів, які розподілені між різними кластерами.

Отже, розбиття n-елементної множини на підмножини може бути як з повтореннями, так і без повторень. Якщо $\rho \in \Theta$ – з повтореннями, то для фіксованого n підмножина $W_{\eta^k} \subset W$ – скінченна, а множина W – нескінченна.

Висновки

У результаті викладеного вище випливає, що множини комбінаторних

конфігурацій можуть бути як скінченними, так і нескінченними. Наприклад, підмножина ізоморфних сполучень та розміщень з повтореннями $W_{\eta^k} \subset W$ для фіксованого n –скінченна, а їхня множина W для цього ж n – нескінченна. Залежно від умови задачі комбінаторної оптимізації розбиття n-елементної множини на підмножини може бути як з повтореннями, так і без повторень, а їхня множина – як скінченною, так і нескінченною.

Аналіз комбінаторних конфігурацій як аргументу цільової функції дозволяє виявляти характерні їхні властивості, адекватно будувати математичні моделі задач певного класу та розробляти ефективні алгоритми для їхнього розв'язання.

Література

1. Холл М.Х. Комбинаторика / М.Х. Холл [пер. з англ. под ред. А. О. Гельфонда].– М.: Мир, 1970. – 424 с.
2. Рыбников К.А. Введение в комбинаторный анализ / К.А. Рыбников. – М.: Изд-во Москов. ун-та, 1985. – 308 с.
3. Рейнгольд Э., Нивергельт Ю., Део Н. Комбинаторные алгоритмы. Теория и практика / Э. Рейнгольд, Ю.Нивергельт, Н. Део [пер. з англ. под ред. В.Б. Алексеева]. – М.: Мир, 1980. – 476 с.
4. Липский В. Комбинаторика для программистов / В. Липский [Пер. с польск.]. – М.: Мир, 1988.– 213 с.
5. Курош А.Г. Курс высшей алгебры / А.Г. Курош. – М.: Наука, 1968. – 431 с.
6. Фрид Э. Элементарное введение в абстрактную алгебру / Э.Фрид [Пер. с англ.]– М.: Мир. 1979. – 230 с.
7. Эндрюс Г. Теория разбиений / Г. Эндрюс [Пер. с англ.] – М.: Наука, 1982.– 276 с.
8. Тимофієва Н.К. Теоретико-числові методи розв'язання задач комбінаторної оптимізації. Автореф. дис... докт. техн. наук / – Ін-т кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ. – 2007. – 32 с.
9. Komyak V.V. Obtaining the Local Extremum in the Problem of Covering the Fields by the Circles of Variable Radius / V.V, Komyak, V.M. Komyak, A.V. Pankratov, A.Yu. Prikodko // USiM. – 2016.– №2. – P. 22–27.

Literatura

1. Holl M.X. Kombinatorika / M.X. Holl [per. z anhl. pid red. A.O. Gelfonda]. – M.: Mir, 1970. – 423 s.
2. Rybnikov K.A. Vvedenie v kombinatornyj analiz / K. A. Rybnikov. – M.: Izd-vo Moskov. un-та, 1985. – 308 s.
3. Rejngold E. Koмbinatornye algoritmy. Teorija i praktika / E. Rejngold, Yu. Nivergelt, N. Deo [per. z anhl. pid red. V.B. Alekseeva]. – M.: Mir, 1980. – 476 s.
4. Lipskij V. Kombinatorika dlja programistov / V. Lipskij [per. z polsk.]– M. Mir, 1988.– 213 s.
5. Kurosh A.G. Kurs vysshej algebry. – M.: Nauka, 1968. – 431 s.
6. Frid E. Elementarnoe vvedenie v abstraktnuju algebru / E.Frid [per. z anhl.]– M.: Mir. 1979. – 230 s.
7. Endrus G. Teoryja razbienij / G. Endrus.[per. z anhl.]. – M.: Наука, 1982.– 276 s.
8. Tymofijeva N.K. Teoretyko-thyslovi metody rozvjazannja zadath kombinatornoji optymizatsji. Avtoref/ dys…dokt/ texn/ nauk / In-t kibernetyky im. V.M. Glushkova NAN Ukrajiny, Kyjiv. – 2007/ – 32 s.
9. Komyak V.V. Obtaining the Local Extremum in the Problem of Covering the Fields by the Circles of Variable Radius / V.V, Komyak, V.M. Komyak, A.V. Pankratov, A.Yu. Prikodko // USiM. – 2016.– №2. – P. 22–27.

RESUME

N.K. Tymofijeva

On the nature of finite end infinite of combinatorial sets

The properties of combinatorial configurations and their sets are considered. It is shown that depending on the problems of combinatorial optimization, they can be finite and infinite, both with repetitions, and without repetitions. Typically, combinatorial optimization problems are solved on a finite set of combinatorial character. The argument of the objective function in them is combinatorial configurations of different types. These are permutations, selections of different types, the partition of a natural number, graphs, etc. But if we analyze in detail the argument of the objective function for various

combinatorial optimization problems, then one can see that the combinatorial configurations can be both repetitions and without repetitions, and their sets are both finite and infinite. In artificial intelligence, combinatorial configurations can be both input data and argument of objective function.

When solving the clustering problem, the number of clusters and their characteristics are unknown, but a finite set of elements is preset, that need to be optimally distributed over clusters. Therefore, the argument of the objective function in it is a partition n-element set on a subset without repetitions. Accordingly, their set is finite. In the classification of the characteristics of classes, as a rule known, but an unknown number of elements that are subject to classification. In addition, one and the same object may belong to different classes. The argument of the objective function in this problem is formed from an infinite base set and also there is a partition n-element set on a subset but with repetitions, and their set is infinite. To the problems of the partition include the problem of covering the objects of a given surface. Having modulated it within the framework of combinatorial optimization theory, one can see that the argument of the objective function in it is the partition n-element set on a subset, with both repetitions and without repetitions.

Also, in the article it is shown that the combinatorial sets have a fractal structure.

Надійшла до редакції 19.10.2017

